Exercice n° 13

Soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

● f est définie lorsque $\dfrac{x}{x-1}\geq 0$ *et* $x-1\neq 0$

$\Rightarrow D_f=]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$

● f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{2\times\sqrt{\frac{x}{x-1}}}=\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{2\times\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}<0;\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$$

Tableau des variations:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖	‖	$-$
$f(x)$	1 ↘	0	‖	$+\infty$ ↘ 1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\sqrt{1}=1\ ;\ \lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\sqrt{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

● **erreur** : $g(x)=f(\sin x),\ x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$x\mapsto\sin x$ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\sin\left(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$

Or f n'est pas définie sur $]0,1]$

Donc g n'est pas définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (impossible).

Exercice n° 14

$f(x)=\cos^2 x, x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

● a) $x\mapsto\cos x$ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos^2 x$ est Dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$f'(x)=2(-\sin x)\cos x=-2(\sin x).\cos x$

$\boxed{f'(x)=-2\cos x.\sin x=-\sin 2x}, x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

b) On a: $\cos x>0$ et $\sin x>0$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc

$\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[: f'(x)<0$

T.V:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

● a) $g'(x)=f'(x)-1<0$

g continue et strictement décroissante donc g est une Bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},1\right[$

Comme $0\in\left]-\dfrac{\pi}{2},1\right[$, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) */ si $x\leq\alpha\Leftrightarrow g(x)\geq g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$

. */ $x\geq\alpha\Leftrightarrow g(x)\leq g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)\leq 0$.

(Car g est décroissante)

c) $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}<0$

$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\pi}{6}>0$

$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right).g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<0$ Donc $\boxed{\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{6}}$.

d) Position de C_f et Δ :

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
position	(C) au Dessus de D		(C) au dessous de D

(C) coupe D

Exercice n° 15

● $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}2-\sqrt{x^2-x}=2=f(0)$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=2=f(0)$

f Continue a gauche et à droite

Qarray.tn-Aqra Blech-Qarray.tn